

排除影響を考慮した3次元乱流境界層の一計算法

林田 滋* 嶋 徹**

A Method for Calculating Three-Dimensional Turbulent Boundary Layer Including Displacement Effect

Shigeru Hayashita, Toru Shima

A method is presented for calculating the three-dimensional boundary layer including the displacement effect.

In order to take account of the displacement effect, the potential velocity needed for boundary layer equations is calculated at the boundary layer thickness from the body surface, not on one.

The governing equations, however, are first-order boundary layer equations.

The results of computation for an ellipsoid of revolution are presented.

1. 緒 言

物体まわりの粘性流について調べるために、3次元乱流境界層理論は有力な手段であり、船舶工学関係でもこれまでに、各種の研究^{1),2)}が行われてきた。

境界層理論では、境界層が薄いとして、Navier-Stokesの方程式を簡略化した境界層方程式を用いているが、物体後方では境界層の厚さが増大し、もはや境界層の厚さが薄いとする仮定が成り立たなくなる。そこで、このような領域における境界層は、いわゆる厚い境界層として取扱う必要がある。

厚い境界層の理論は、従来は微小として無視されてきた(i)物体表面の曲率、(ii)層内の圧力変化、(iii)境界層の排除影響などを考慮するものである。これらについては、姫野ほか³⁾、姫野・奥野^{4),5)}、波多野・堀田⁶⁾、波多野ほか⁷⁾、Larsson⁸⁾によって研究されているが、未だ不十分であると思われる。

このなかで、排除影響は最も大きなものであると考えられる。この影響を考慮する方法としては、従来から、境界層の排除厚さ分だけ肥えた物体まわりのポテンシャル流を計算し、得られた圧力を用いて再度境界

層を計算することが行われている。例えばLarsson⁸⁾は排除厚さを実験から求めて境界層計算を行い、より実験に近い結果を得ている。

そこで、本研究では境界層の排除影響を第1近似理論の範囲で簡単に考慮するため、摂動論におけるcomposite expansionの手法を使って得られる速度分布を用いて境界層計算を試みた。具体的には、物体表面上のポテンシャル速度を用いるかわりに、表面から境界層厚さだけ離れたところのポテンシャル速度を用いて境界層計算を行う。ただし境界層方程式は従来の式⁹⁾をほぼそのまま使用し、計算した。

2. 境界層外端の速度

境界層計算に必要な排除影響を考慮した境界層外端の速度の求め方について述べる。

物体表面から垂直な座標を ξ とし、ポテンシャル流の速度ベクトルを $V(\xi)$ 、 $V(\xi)$ の表面値 $V(0)$ を用いて境界層方程式を解き、得られる層内の速度ベクトルを $v_i(\xi)$ とすると、特異摂動論におけるcomposite expansionの手法を使用し、全領域で一様に有意な解

* 船舶工学科 ** 嶋造船所 (研究当時長崎総合科学大学大学院)
1980年5月31日受付

(uniformly valid solution) $v(\zeta)$ は次のように表わされる。

$$v(\zeta) = V(\zeta) + v_1(\zeta) - V(0) \quad (1)$$

田中一姫野¹⁰⁾は(1)式を用いて船の伴流分布を計算し、比較的实验に近い結果を得ている。

また $v_1(\zeta)$ の場合の境界層厚さを $\delta_{(1)}$ とすると、境界条件より、

$$v_1(\delta_{(1)}) = V(0) \quad (2)$$

が成り立つ。ただし、厳密に言えば、 $v_1(\delta_{(1)})$ には $V(0)$ と異なり、壁面に垂直な成分が含まれているが、第1近似理論では通常これをオーダーが低いとして無視している。

ここで、(1)式で表わされる速度を用いて再び境界層計算を行うことを考える。そのためには、境界層外端の速度を求める必要がある。今、境界層計算がなされたものとして、そのときの境界層厚さを $\delta_{(2)}$ とすると、外端速度は $\zeta = \delta_{(2)}$ を(1)式に代入して次のように求められる。

$$v(\delta_{(2)}) = V(\delta_{(2)}) + v_1(\delta_{(2)}) - V(0) \quad (3)$$

さて、 $\delta_{(1)}$ と $\delta_{(2)}$ は同じくらいのオーダーと考えられるから、 ε を微小量とし、

$$\delta_{(2)} = \delta_{(1)} + \varepsilon \quad (4)$$

とおく、(4)式を(3)式に代入して、 ε に関して展開すると、

$$v(\delta_{(2)}) = V(\delta_{(2)}) + \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=\delta_{(1)}} \varepsilon + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \zeta^2} \Big|_{\zeta=\delta_{(1)}} \varepsilon^2 + \dots \quad (5)$$

となる。なお、ここでは(2)式を用いて簡単にしてある。境界層内の速度分布は滑らかに外部流に接続するから、 $\partial v_1 / \partial \zeta|_{\zeta=\delta_{(1)}} = 0$ 。さらに、 ε^2 以上のオーダーの項を微小として省略すると、(5)式は、

$$v(\delta_{(2)}) = V(\delta_{(2)}) \quad (6)$$

と簡単になる。すなわち、境界層外端での速度として表面より境界層厚さだけ離れたところのポテンシャル速度 $V(\delta)$ (以後境界層厚さは $\delta_{(2)}$ の添字をとり、 δ と表わす) を用いればよい、との結論を得る。これは笹島ほか¹¹⁾が δ 補正と呼んだものにほぼ等しい。また田中¹²⁾は別の観点から、境界層内の圧力が境界層外端でのポテンシャルの圧力に等しいことを導いている。

姫野一奥野⁵⁾は、境界層計算における物体後方付近での解の発散を防ぐために、ポテンシャル流を計算する時に適当な粘性修正を行うことを提案しているが、本方法も解の発散防止に効果があると思われる。

3. 基礎式および数値計算

境界層計算の解法としては積分型の解法を用い、座

標に流線座標 (s, n, ζ) をとれば、3次元乱流境界層の基礎式である主流方向と2次流れ方向の運動量積分式および補助方程式としての主流方向と2次流れ方向の運動量モーメント積分式は、よく知られているように次式で表わされる。

$$\frac{\partial \theta_{11}}{\partial s} + \frac{\partial \theta_{12}}{\partial n} + \theta_{11}(H+2) \frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial s} - K_1(\theta_{11} - \theta_{22}) + \frac{W}{U^2} \frac{\partial W}{\partial s} \cdot \delta = \frac{\tau_{sw}}{\rho U^2} \quad (7)$$

$$\frac{\partial \theta_{21}}{\partial s} + \frac{\partial \theta_{22}}{\partial n} + 2\theta_{21} \frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial s} - 2K_1\theta_{21} + K_2\theta_{11}(H+1) + K_2\theta_{22} + \frac{W}{U^2} \frac{\partial W}{\partial n} \cdot \delta = \frac{\tau_{nw}}{\rho U^2} \quad (8)$$

$$\frac{\partial G_{11}}{\partial s} + \frac{2G_{11}}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial s} + (2G_{11} + G_{10}) \frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial G_{12}}{\partial n} + \frac{2G_{12}}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial n} - K_1(G_{11} - G_{22}) - P + \frac{W}{2U^2} \frac{\partial W}{\partial s} = \frac{1}{\delta^2} \int_0^\infty \frac{\tau_s}{\rho U^2} d\zeta \quad (9)$$

$$\frac{\partial G_{21}}{\partial s} + \frac{\partial G_{22}}{\partial \delta} \frac{\partial \delta}{\partial s} + 2G_{21} \frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial G_{22}}{\partial n} + \frac{2G_{22}}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial n} - 2K_1G_{21} + K_2(G_{10} + G_{11} + G_{22}) + Q + \frac{W}{2U^2} \frac{\partial W}{\partial n} = \frac{1}{\delta^2} \int_0^\infty \frac{\tau_n}{\rho U^2} d\zeta \quad (10)$$

ここで、-----の項は2次流れを微小とする、いわゆる small cross flow の解法では省略される項、---の項は多少変形する項である。また---の項は従来の計算では $W=0$ として無視されていた項である。 U, W は各々境界層外端におけるポテンシャル速度の物体表面に対する接線成分、法線成分である。係数 K_1, K_2 (求め方は後述) は各々 n, s 線の測地的曲率であって、ポテンシャル流線の拡大縮小率 (縮小を正) および曲率をそれぞれ表わす。 ρ は流体の密度、 δ は境界層厚さ、 τ_s, τ_n は各々主流方向、2次流れ方向の層内摩擦応力を示し、 τ_{sw}, τ_{nw} はそれぞれの壁面上での値である。厳密に言えば、(7)~(10)式は物体表面上のポテンシャル速度を用いるとき ($W=0$) のみ成り立つ式であるが、第1近似理論の範囲では正しい。

層内の速度分布を (s, n, ζ) に対応して (u, v, w) とすれば、 $\theta_{11}, \theta_{12}, \dots$ および G_{10}, G_{11}, \dots は次のように定義される。

$$\left. \begin{aligned} \delta_1^* &= \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\zeta, \quad \theta_{11} = \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\zeta, \\ H &= \frac{\delta_1^*}{\theta_{11}} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \theta_{12} &= \int_0^\infty \frac{v}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\zeta, \quad \theta_{21} = \int_0^\infty -\frac{uv}{U^2} d\zeta, \\
 \theta_{22} &= \int_0^\infty -\frac{v^2}{U^2} d\zeta \\
 G_{10} &= \frac{1}{\delta^2} \int_0^\infty \zeta \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\zeta, \\
 G_{11} &= \frac{1}{\delta^2} \int_0^\infty \zeta \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\zeta, \\
 G_{12} &= \frac{1}{\delta^2} \int_0^\infty \zeta \frac{v}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\zeta \\
 G_{20} &= \frac{1}{\delta^2} \int_0^\infty \left(-\zeta \frac{v}{U}\right) d\zeta, \\
 G_{21} &= \frac{1}{\delta^2} \int_0^\infty \left(-\zeta \frac{uv}{U^2}\right) d\zeta, \\
 G_{22} &= \frac{1}{\delta^2} \int_0^\infty \left(-\zeta \frac{v^2}{U^2}\right) d\zeta \\
 P &= \frac{1}{\delta^2} \int_0^\infty \frac{w}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\zeta, \\
 Q &= \frac{1}{\delta^2} \int_0^\infty \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(-\frac{vw}{U^2}\right) d\zeta
 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

主流方向の速度分布には指数法則

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{\zeta}{\delta}\right)^{\frac{H-1}{2}} \quad (12)$$

を用い、2次流れ方向には、reverse cross flow をも表わし得る2パラメータの奥野モデル¹³⁾

$$\frac{v}{U} = \frac{u}{U} \{ \tan \beta (1 - \eta)^2 + c \eta (1 - \eta)^2 \}, \quad \eta = \frac{\zeta}{\delta} \quad (13)$$

を使う。ここで β は横流れ角の壁面值、すなわち、ポテンシャル流線と限界流線のなす角であり、限界流線の向きがポテンシャル流線に対して、正の n 軸の方向に向っている場合を正とする。 c は未定係数である。

局部摩擦則としては、Ludwig-Tillmannの公式を用いる。

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\tau_{sw}}{\rho U^2} &= 0.123 \times 10^{-0.678H} (U \theta_{11} / \nu)^{-0.268} \\
 \tau_{nw} &= \tau_{sw} \tan \beta
 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

ただし、 ν は動粘性係数である。

層内の摩擦応力分布は、田中-姫野¹⁴⁾の提案した渦動粘性係数 ϵ の分布を使い、次式のように表わす。

$$\left. \begin{aligned}
 \tau_s &= \rho \epsilon \frac{\partial u}{\partial \zeta}, \quad \tau_n = \rho \epsilon \frac{\partial v}{\partial \zeta} \\
 \epsilon &= U \delta \left\{ x \frac{u_*}{U} (\eta - 3\eta^2 + 2\eta^3) \right. \\
 &\quad \left. + 0.214 \frac{\delta_*^*}{\delta} (\eta^2 - \eta^3) \right\} \\
 u_* &= \sqrt{\tau_w / \rho}, \quad \tau_w = \sqrt{\tau_{sw}^2 + \tau_{nw}^2}, \quad x = \text{kármán 常数}
 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

計算にあたっては、境界層外端でのポテンシャル速度 U, W を求める必要がある。そこで、物体表面に固

有の直交座標系 (μ, θ, ζ) (Fig. 1) を選び、対応する単位ベクトルを $(e_\mu, e_\theta, e_\zeta)$ とすると、 (s, n, ζ) に対応する単位ベクトル (e_s, e_n, e_ζ) 、ポテンシャル速度 U, W は次のようにして求められる。

$$\left. \begin{aligned}
 e_\zeta &= e_\mu \times e_\theta \\
 e_n &= e_\zeta \times V(\delta) / |e_\zeta \times V(\delta)| \\
 e_s &= e_n \times e_\zeta
 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned}
 U &= V(\delta) \cdot e_s \\
 W &= V(\delta) \cdot e_n
 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

さらに K_1, K_2 は e_s, e_n を用いて、次のように表現できる¹⁵⁾。

$$\left. \begin{aligned}
 K_1 &= -e_n \cdot \frac{\partial e_s}{\partial n} \\
 K_2 &= -e_s \cdot \frac{\partial e_n}{\partial s}
 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

次に数値計算上便利のように、流線座標 (s, n) に対して求めた境界層方程式を物体表面座標 (μ, θ) に変換し、求解する。変換式は次式のような形となる。

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial s} &= \frac{A}{h_\mu} \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{B}{h_\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial n} = -\frac{B}{h_\mu} \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{A}{h_\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \\
 A &= U_\mu / \sqrt{U_\mu^2 + U_\theta^2}, \quad B = U_\theta / \sqrt{U_\mu^2 + U_\theta^2}
 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

ここで U_μ, U_θ はそれぞれ U の μ 方向成分、 θ 方向成分であり、 h_μ, h_θ はそれぞれ μ 軸、 θ 軸の測度係数である。(19)式を(7)~(10)式に代入すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 &I_{i1} \frac{\partial \theta_{11}}{\partial \mu} + I_{i2} \frac{\partial H}{\partial \mu} + I_{i3} \frac{\partial (\tan \beta)}{\partial \mu} + I_{i4} \frac{\partial c}{\partial \mu} \\
 &= J_{i0} + J_{i1} \frac{\partial \theta_{11}}{\partial \theta} + J_{i2} \frac{\partial H}{\partial \theta} + J_{i3} \frac{\partial (\tan \beta)}{\partial \theta} + \\
 &\quad + J_{i4} \frac{\partial c}{\partial \theta} + J_{i5} \frac{\partial U}{\partial \mu} + J_{i6} \frac{\partial U}{\partial \theta} + J_{i7} \frac{\partial W}{\partial \mu} + \\
 &\quad + J_{i8} \frac{\partial W}{\partial \theta} + J_{i9} K_1 + J_{i10} K_2 \quad (i=1 \sim 4) \quad (20)
 \end{aligned}$$

ここで、未知数は主流方向の運動量厚さ θ_{11} 、形状係数 H 、横流れ角の正接 $\tan \beta$ 、速度分布のパラメータ c 、ポテンシャル速度 U, W およびそれより求まる K_1, K_2 の8つである。係数 I_{ij} ($i, j=1 \sim 4$)、 J_{ik} ($i=1 \sim 4, k=1 \sim 10$) はこれら未知数の関数である。(20)式を解くには、 θ 方向の微係数を差分によって求め、 μ 方向にRunge-Kutta-Gill法によって積分する。ただし、 U, W, K_1, K_2 は δ が求まった後、計算できる量なので、ここでは δ の値が一定となるまで、各段階の δ に対し、諸量を求め、 μ 方向に計算を繰返す。初期値は、初期位置まで平板と仮定し得る。

4. 計算結果と考察

前節に述べた方法に従って、長軸 $2a$ 、短軸 $2b$ の比が 4 の迎角を有する回転楕円体について計算を行った。物体表面座標としては回転楕円体表面座標を用い、 μ , θ , 迎角 α などは Fig. 1 のように定義する。

回転楕円体まわりの速度ポテンシャルは Lamb¹⁶⁾ に よって与えられており、これにより U , W , K_1 , K_2 を

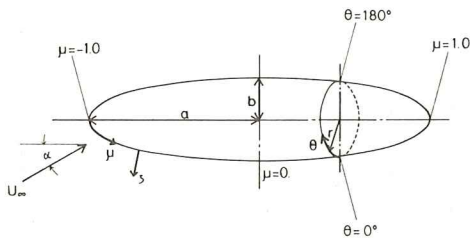
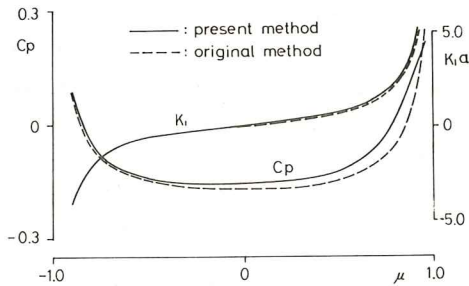
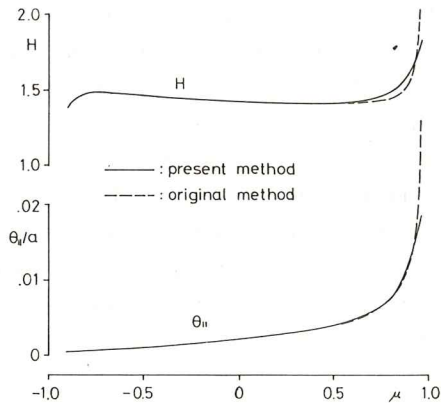


Fig. 1 Ellipsoid of revolution.

Fig. 2 Pressure and convergence rate of streamline K_1 distributions ($\alpha=0^\circ$).Fig. 3 Boundary layer parameters ($\alpha=0^\circ$).

計算することができる。全長を基準としたレイノルズ数は 0.778×10^6 、迎角は 0° と 15° 、分割区間 $\Delta\theta$ は $\pi/36$ 、 $\Delta\mu$ は 0.01 (全長の $1/200$) とし、初期位置は $\mu = -0.91$ として計算を行った。解法としては、厳密な解法と small cross flow の解法の 2 通りについて行った。

迎角 0° の場合は、 K_1 は従来の方法による値 (以下「表面値」と称する) と差はほとんどないが、圧力係数 C_p は、値そのものは表面値より高くなっているものの、圧力勾配は後方で小さくなっている (Fig. 2)。このため、運動量厚さ θ_{11} 、形状係数 H は物体前方では表面値と差はなく、 $\mu=0.6$ 付近で H が表面値より大きくなるものの、 $\mu=0.9$ 以後は反対に、 θ_{11} , H 共に表面値より小さくなっている。

次に迎角 15° の場合について述べる。 $\theta=150^\circ$, $\mu=0.2, 0.4$ に沿った圧力, K_1 , K_2 を Fig. 4, Fig. 6, Fig. 8 に示す。Fig. 4 には値が途中で発散したものもあるが、これは解が発散したためである。物体後方を除き、厳密な解法と small cross flow の解法による値の差は小さい。表面値と比べ、本方法による値は、圧力が均一化する、 K_1 が小さく、すなわち流線が拡大する、また K_2 の絶対値が小さく流線の曲率が小さくなる方向にそれぞれ変化している。これらはすべて境界層の発達を抑制する方向に働く。境界層の計算結果を Fig. 5, Fig. 7, Fig. 9 に示す。計測値は 3 孔管を用いて計測した層内の速度分布より求めたもので、レイノルズ数が 0.382×10^6 と計算とは異っているが、その影響は小さいと思われる。計測値は実験精度の問題もあり、多少ばらついている。計算値と計測値を比較すると、本方法による値と表面値とを問わず、厳密な解法による値よりも、small cross flow の解法による値の方が計測値により近いようである。このような傾向は Larsson⁸⁾ の計算結果にも見られ、近似解の方が全般的に実験値に近いとは面白い。このことは、現在の境界層方程式やその解法に改善の余地のあることを示している。本方法で計算された θ_{11} (運動量厚さ), H (形状係数), β (横流れ角) の絶対値は、厳密な解法では全般的に小さくなり、また small cross flow の解法では leeward で θ_{11} が小さくなるなど、予想通り境界層の発達が抑えられており、本方法は第 1 近似理論の範囲内で有効なものであることが判った。ただし、より以上の解の改善を計るためには、第 2 近似境界層理論を考える必要がある。

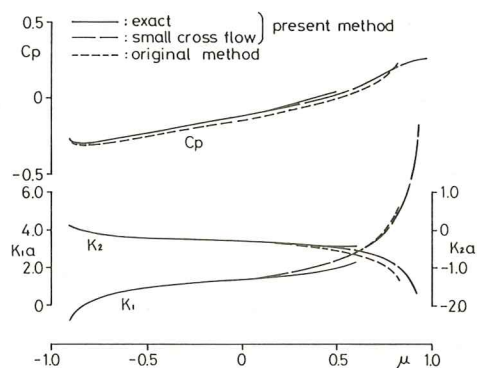


Fig. 4 Pressure, convergence rate of streamline K_1 and geodesic curvature of streamline K_2 distributions along $\theta = 150^\circ$ ($\alpha = 15^\circ$).

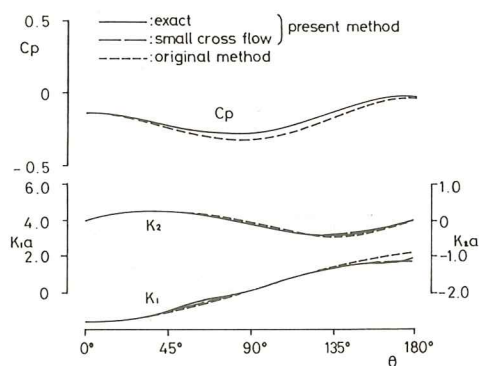


Fig. 6 Pressure, convergence rate of streamline K_1 and geodesic curvature of streamline K_2 distributions along $\mu = 0.2$ ($\alpha = 15^\circ$).

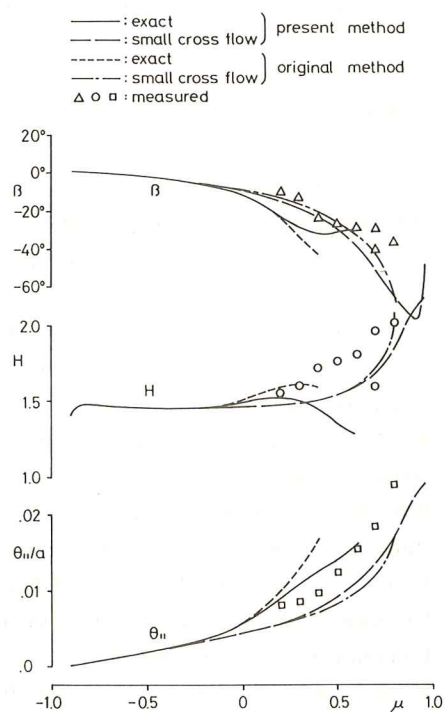


Fig. 5 Boundary layer parameters along $\theta = 150^\circ$ ($\alpha = 15^\circ$).

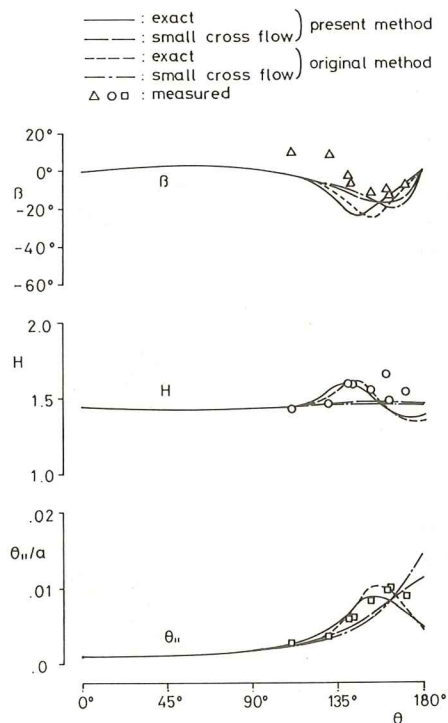


Fig. 7 Boundary layer parameters along $\mu = 0.2$ ($\alpha = 15^\circ$).

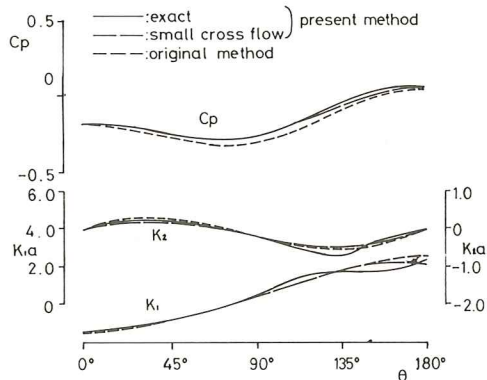


Fig. 8 Pressure, convergence rate of streamline K_1 and geodesic curvature of streamline K_2 distributions along $\mu = 0.4$ ($\alpha = 15^\circ$).

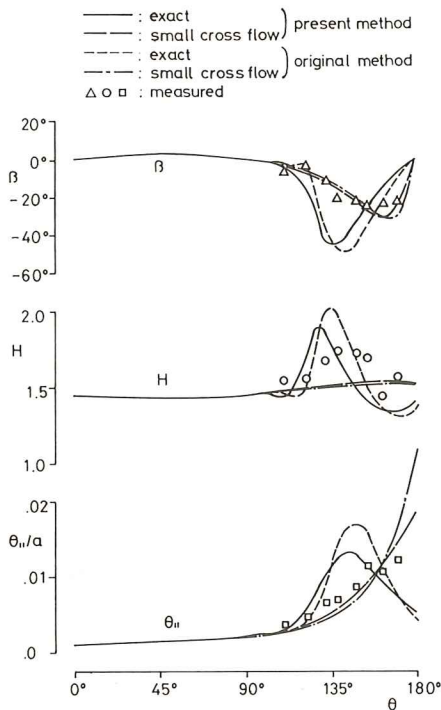


Fig. 9 Boundary layer parameters along $\mu = 0.4$ ($\alpha = 15^\circ$).

5. 結 言

境界層の排除影響を考慮するため、従来の境界層方程式をほぼそのまま使い、物体表面より境界層厚さだけ離れたところのポテンシャル速度を用いて計算を行う方法を示した。回転楕円体について計算を行ったところ、本方法は物体後方での境界層の急激な発達（解の発散）を防ぐのに効果があることが判った。

本稿を終えるにあたり、本研究は著者の1人の大学院の卒業研究として行われたものであり、終始熱心なご激励と貴重なご議論を賜った長崎総合科学大学工学部吉田稔教授に心から感謝する次第である。境界層計算プログラムは羽田他所夫設計事務所（研究当時同大学大学院）武田辰雄氏の作成したものに改良を加えたものであり、また当時の大学院生日野信一郎君には計算のチェックを始めとし、色々と援助を受けた。ここに深く感謝する。実験に関しては当時の同大学学部生海津卓也、船嶋隆之、堀内昇の諸君の努力に負うところが多い。厚くお礼申し上げる。また数値計算には長崎総合科学大学YHP-2100A, YHP-3000を使用したことを付記し関係各位に感謝する。

参 考 文 献

- 1) 姫野洋司, 奥野武俊: 境界層理論と船体まわりの粘性流場, 船型設計のための抵抗・推進理論シンポジウムテキスト, 日本造船学会 (昭54・7), p. 93.
- 2) 波多野修次: 三次元乱流境界層計算法, 粘性抵抗シンポジウムテキスト, 日本造船学会 (昭48・5), p. 95.
- 3) 姫野洋司, 小松康夫, 奥野武俊, 田中紀男: 境界層理論による船尾後流の計算と排除影響について, 関西造船協会誌, 第163号 (昭51・12), p. 59.
- 4) Himeno, Y. and Okuno, T.: Study on Cross Flow in Ship Boundary Layer, Proceeding of International Symposium on Ship Viscous Resistance, Göteborg, Sweden (1978).
- 5) 姫野洋司, 奥野武俊: 船体まわりの境界層内圧力分布および排除影響について, 関西造船協会誌, 第174号 (昭54・9), p. 57.
- 6) 波多野修次, 堀田多喜男: 3次元境界層の第2次近似計算例, 西部造船会会報, 第53号 (昭51・

- 11), p. 33.
- 7) 波多野修次, 茂里一紘, 堀田多喜男: 船の境界層流れの実験および境界層計算の諸仮定に関する考察, 西部造船会会報, 第56号 (昭53・3), p. 73.
- 8) Larsson, L.: A Calculation Method for Three-Dimensional Turbulent Boundary Layers on Ship-like Bodies, Proceeding of First International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics, Washington D. C (1975), p. 385.
- 9) 武田辰雄: 3次元乱流境界層の計算—厳密な解法と2次元流れを微小とした解法との比較について—, 長崎総合科学大学紀要, 第19巻 (1978), p. 321.
- 10) 田中一郎, 姫野洋司, 松本典幸: 船体まわりの粘性流場の計算—主として伴流について—, 関西造船協会誌, 第150号 (昭48・9), p. 19.
- 11) 笹島秀雄, 吉田栄一, 田中一郎, 仲渡道夫: 形状抵抗の一計算法, 造船協会論文集, 第104号 (昭34・1), p. 13.
- 12) 田中一郎: 船の粘性抵抗に対する形状影響について (その2—二次元物体の圧力抵抗および全抵抗), 造船協会論文集, 第114号 (昭38・12), p. 34.
- 13) 奥野武俊: 船体表面の摩擦応力分布および境界層内の2次元流れに関する研究, 日本造船学会論文集, 第139号 (昭51・6), p. 1.
- 14) 田中一郎, 姫野洋司: 渦動粘性係数を使った2次元乱流境界層の計算, 関西造船協会誌, 第146号 (昭47・12), p. 45.
- 15) 姫野洋司, 田中一郎: 厳密な積分法に基づく3次元乱流境界層方程式の解法, 関西造船協会誌, 第159号 (昭50・12), p. 95.
- 16) Lamb, H.: Hydrodynamics, Cambridge University Press, (1932).